

Межрегиональная олимпиада
по математике

Условия задач 9 класс

1. (2 балла) Про натуральное число x сделано пять утверждений:

$$3x > 91$$

$$x < 120$$

$$4x > 37$$

$$2x \geq 21$$

$$x > 7$$

Известно, что только три из них верны, а два неверны. Найти x .

2. (2 балла) При каких целых p и q значение многочлена $f(x) = x^2 + px + q$ делится на 2 при любом целом x ?

3. (3 балла) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

4. (4 балла) Население города увеличивалось в течение x лет на 50% ежегодно, потом в течение y лет оно уменьшалось на $\frac{388}{9}\%$ ежегодно, а

затем оно еще уменьшалось на $\frac{50}{3}\%$ в год в течение z лет. В результате население удвоилось. Известно, что x, y, z – целые числа. Найдите их.

5. (4 балла) Отличные от нуля числа a, b, c удовлетворяют условиям $2011(a + b + c) = 1$ и $ab + ac + bc = 2011 \cdot abc$.

Найти $a^{2011} + b^{2011} + c^{2011}$.

6. (5 баллов) Найдите все пары целых чисел (x, y) , для которых справедливо равенство $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$.

Решения 9 класс

1. (2 балла) Про натуральное число x сделано пять утверждений:

$$3x > 91$$

$$x < 120$$

$$4x > 37$$

$$2x \geq 21$$

$$x > 7$$

Известно, что только три из них верны, а два неверны. Найти x .

Решение. Преобразуем исходную систему неравенств

$$x > \frac{91}{3}$$

$$x \geq \frac{21}{2}$$

$$x > \frac{37}{4}$$

$$x > 7$$

$$x < 120$$

Первое неравенство не выполняется, поскольку в противном случае выполняются сразу четыре неравенства. Значит, $x \leq \frac{91}{3}$, и пятое неравенство выполнено.

Второе неравенство также не выполняется, поскольку в противном случае выполнены четыре неравенства: второе, третье, четвертое и пятое. Значит,

$$x < \frac{21}{2}.$$

Теперь сразу видно, что искомое число $x = 10$.

Ответ: $x = 10$

2. (2 балла) При каких целых p и q значение многочлена $f(x) = x^2 + px + q$ делится на 2 при любом целом x ?

Решение: По условию

$$f(x+1) - f(x) = 2x + 1 + p \in \mathbb{M} \quad \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (p+1) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow p - \text{нечетно.}$$

Поэтому числа x^2 и px или оба четные, или оба нечетные, а значит $x^2 + px \in \mathbb{M}$. Следовательно, q -- четное.

Ответ: p – нечетно, q – четно.

3. (3 балла) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

Решение: Замена

$$u = x + y, v = x \cdot y. \quad (1)$$

Исходная система примет вид

$$\begin{cases} u + v = 2 + 3\sqrt{2} & (2) \\ u^2 - 2v = 6. & (3) \end{cases}$$

Умножив уравнение (2) на 2 и сложив с (3), получим $u^2 + 2u = 10 + 6\sqrt{2} \Leftrightarrow (u + 1)^2 = 11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2$. Отсюда

$u_1 = 2 + \sqrt{2}, u_2 = -4 - \sqrt{2}$, а из (2) находим им соответствующие $v_1 = 2\sqrt{2}, v_2 = 6 + 4\sqrt{2}$. С учетом (1) получаем две системы

$$1) \begin{cases} x + y = u_1 \\ x \cdot y = v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, y_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2}, y_2 = 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = u_2 \\ x \cdot y = v_2 \end{cases} \Rightarrow x, y - \text{корни уравнения } t^2 - u_2 t + v_2 = 0, \text{ которое}$$

действительных корней не имеет, т.к. $D < 0$.

Ответ:
$$\begin{cases} x_1 = 2, y_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2}, y_2 = 2. \end{cases}$$

4. (4 балла) Население города увеличивалось в течение x лет на 50% ежегодно, потом в течение y лет оно уменьшалось на $\frac{388}{9}\%$ ежегодно, а затем оно еще уменьшалось на $\frac{50}{3}\%$ в год в течение z лет. В результате население удвоилось. Известно, что x, y, z – целые числа. Найдите их.

Решение: Пусть $a = 50, b = -\frac{388}{9}, c = -\frac{50}{3}$. По условию

$$\left(1 + \frac{a}{100}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{b}{100}\right)^y \cdot \left(1 + \frac{c}{100}\right)^z = 2. \quad (1)$$

Сложим дроби в скобках и разложим числитель и знаменатель на простые множители:

$$1 + \frac{a}{100} = 2^{-1} \cdot 3, \quad 1 + \frac{b}{100} = 2^7 \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-2}, \quad 1 + \frac{c}{100} = 2^{-1} \cdot 3^{-1} \cdot 5$$

Приравнивая показатели степеней в разложении на простые множители левой и правой части уравнения (1), получаем систему линейных уравнений на x, y, z :

$$\begin{cases} -x + 7y - z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \\ -2y + z = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим

Ответ: $x = 4, y = 1, z = 2$.

5. (4 балла) Числа a, b, c удовлетворяют условиям $2011(a + b + c) = 1$ и $ab + ac + bc = 2011 \cdot abc$. Найти $a^{2011} + b^{2011} + c^{2011}$.

Решение. Из условия вытекает уравнение

$$\frac{1}{a + b + c} = \frac{ab + ac + bc}{abc} = 2011.$$

Значит, $abc = (a + b + c)(ab + ac + bc)$. Последнее выражение можно разложить на множители $(a + b)(a + c)(b + c) = 0$. Значит, среди чисел

a, b, c есть два числа, дающих в сумме 0. Пусть $a = -b$. Тогда $c = \frac{1}{2011}$ и

$$a^{2011} + b^{2011} + c^{2011} = \frac{1}{2011^{2011}}.$$

Ответ: $\frac{1}{2011^{2011}}$

6. (5 баллов) Найдите все пары целых чисел (x, y) , для которых справедливо равенство

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2.$$

Решение:

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (1)$$

$$(x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = y^2. \quad (2)$$

Положим $z = x^2 + 8x + \frac{7}{2} \Rightarrow 2z = 2x^2 + 16x + 7 \in \mathbb{Z}$. Из (2) находим

$$\left(z - \frac{7}{2}\right)\left(z + \frac{7}{2}\right) = y^2 \Leftrightarrow z^2 - \frac{49}{4} = y^2,$$

что эквивалентно $(2z - 7)(2z + 7) = 49$. Поскольку

$(2z \pm 7) \in \mathbb{Z}$, а

$49 = 1 \cdot 49 = 7 \cdot 7 = 49 \cdot 1 = -1 \cdot (-49) = (-7) \cdot (-7) = (-49) \cdot (-1)$, то

остаются возможными только следующие шесть вариантов:

- 1) $\begin{cases} 2z - 7 = 1 \\ 2z + 7 = 49 \end{cases} \Rightarrow y = 12, 2z = 25 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -9. \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 2z - 7 = 7 \\ 2z + 7 = 7 \end{cases} \Rightarrow y = 0, 2z = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8. \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 2z - 7 = 49 \\ 2z + 7 = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -12, 2z = 25 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -9. \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} 2z - 7 = -1 \\ 2z + 7 = -49 \end{cases} \Rightarrow y = -12, 2z = -25 \Rightarrow x = -4.$
- 5) $\begin{cases} 2z - 7 = -7 \\ 2z + 7 = -7 \end{cases} \Rightarrow y = 0, 2z = -7 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -7. \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} 2z - 7 = -49 \\ 2z + 7 = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 12, 2z = -25 \Rightarrow x = -4.$

Ответ:

$(1; 12), (1; -12), (-9; 12), (-9; -12), (0; 0), (-8; 0), (-4; -12),$

$(-4; 12), (-1; 0), (-7; 0)$

(10 пар).